УДК 517.6

М. Ю. Медведик

ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ КРЫШЕК ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН НА ЭКРАНАХ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ

Аннотация. Рассмотрена задача дифракции электромагнитной волны на неплоском экране, расположенном в свободном пространстве. Задача сведена к интегральному уравнению. Рассмотрены базисные функции крышки и доказана теорема об аппроксимации. Рассмотрено применение субиерархического метода для решения интегрального уравнения. Представлены численные результаты.

Ключевые слова: задача дифракции, интегральное уравнение, субиерархический метод, численные результаты.

Abstract. The article considers a problem of diffraction of electromagnetic wave on nonplanar screen located on free space. The problem is reduced to integral equation. The author considers the basic functions of the “Rooftop” and proves a theorem of approximation. The researcher also considers application of the subhierarchical method for solving integral equations and presents the numerical results.

Key words: problem of diffraction, integral equation, subhierarchical method, numerical results.

Введение

Настоящая работа посвящена численному исследованию векторной задачи дифракции электромагнитной волны на экранах. Это задача дифракции электромагнитного поля на бесконечно тонких и идеально проводящих экранах, имеющих сложную геометрическую форму. Она сводится к векторному интегродифференциальному уравнению на поверхности экрана [1, 2] и решается численно с помощью проекционного метода.

Рассматриваемая задача является классической в электродинамике и активно решается с 1949 г. Использование в радиотехнике и электронике антенн и печатных плат сложной геометрической формы требует построения новых математических моделей для процессов распространения электромагнитных волн в таких устройствах. При этом возникла необходимость исследования нового широкого класса задач электродинамики, характеризующихся сложной геометрией и пространственным расположением. Многочисленные пакеты прикладных программ не позволяют получить эффективное решение данной задачи.

Последние десятилетия характеризуются бурным развитием компьютерной техники. Это способствует активному применению методов компьютерного моделирования для решения подобных задач на экранах канонической формы. Однако следует подчеркнуть, что проблема эффективного численного решения задач дифракции на тонких экранах в настоящее время, по-видимому, пока не решена даже с использованием самых мощных современных ЭВМ.

Для получения результатов задач на экранах сложной геометрической формы используются субиерархические методы [3–12], которые позволяют

не производить повторные вычисления, связанные с формированием матричных элементов. Субиерархические методы эффективно используются совместно с параллельными вычислительными алгоритмами и реализуются на вычислительном кластере.

Постановка задачи дифракции

Пусть M – замкнутая, не обязательно связанная поверхность в R^3 класса C^∞. Пусть

$$\bar{\Omega} \subset M\ ,\ \Omega = \bigcup_i \Omega,\ \ \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_j = \varnothing\ (i \neq j)\ -$$

объединение конечного числа связанных ориентированных незамкнутых и непересекающихся поверхностей класса C^∞ в R^3. Край $\partial\Omega_j = \bar{\Omega}_j \setminus \Omega_j$ поверхности Ω_j есть кусочно-гладкая кривая без точек самопересечения, состоящая из конечного числа простых дуг класса C^∞, сходящихся под углами, отличными от нулевого: $\Gamma = \partial\Omega = \bigcup_j \partial\Omega_j$.

Задача дифракции стороннего монохроматического электромагнитного поля E^0, H^0 на бесконечно тонком идеально проводящем экране Ω, расположенном в свободном пространстве с волновым числом k, $k^2 = \omega^2\mu(\varepsilon + i\sigma\omega^{-1})$, $\operatorname{Im} k \geq 0\ (k \neq 0)$ состоит в определении рассеянного электромагнитного поля

$$E, H \in C^2(R^3 \setminus \bar{\Omega}) \bigcap_{\delta>0} C(\bar{R}^3_+ \setminus \Gamma_\delta) \bigcap_{\delta>0} C(\bar{R}^3_- \setminus \Gamma_\delta)\ ,$$

удовлетворяющего: однородным уравнениям Максвелла

$$RotH = -ikE,$$

$$RotE = \ ikH,\ \ x \in R^3 \setminus \bar{\Omega}\ , \tag{1}$$

краевым условиям для касательной составляющей электрического поля на поверхности экрана

$$E_\tau\,|_\Omega = -E^0_\tau\,|_\Omega\ , \tag{2}$$

условиям конечности энергии в любом ограниченном объеме

$$E, H \in L^2_{loc}(R^3) \tag{3}$$

и условиям излучения на бесконечности (условия Сильвера – Мюллера)

$$E, H = o(r^{-1}),\ r := |\,x\,| \to \infty \text{ при } \operatorname{Im} k > 0\ ,$$

$$H \times e_r - E = o(r^{-1}),\ \ E \times e_r + H = o(r^{-1})\ ,$$

$$E, H = O(r^{-1}),\ \ r \to \infty \text{ при } \operatorname{Im} k = 0\ . \tag{4}$$

Здесь $e_r = x/|x|$; $\times$ означает векторное произведение $\Gamma_\delta := \{x : |x-y| < \delta,\ y \in \Gamma\}$. Электромагнитные поля гармонически зависят от времени (множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен); $\omega > 0$ – круговая частота; $\varepsilon > 0, \mu > 0$ – диэлектрическая и магнитная проницаемости; $\sigma \geq 0$ – проводимость среды. Для полного поля $E^{\text{полн}} = E^0 + E,\ H^{\text{полн}} = H^0 + H$.

Будем предполагать, что все источники падающего поля находятся вне экрана $\bar{\Omega}$ так, что для некоторого $\delta > 0$

$$E^0 \in C^\infty(\Omega_\delta),\ \Omega_\delta = \{x : |x-y| < \delta, y \in \Omega\},$$

откуда следует, что

$$E^0_\tau|_\Omega \in C^\infty(\bar{\Omega}).$$

Обычно падающее поле – это либо плоская волна, либо электрический или магнитный диполь, расположенный вне $\bar{\Omega}$. В этих случаях наши условия выполнены. Поле E^0, H^0 является решением системы уравнений Максвелла в свободном пространстве без экрана.

Условия (4) на бесконечности эквивалентны условиям излучения Зоммерфельда при $\operatorname{Im} k = 0, k \neq 0$:

$$\frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} - ik\begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = o(r^{-1}),\quad \begin{pmatrix} E \\ H \end{pmatrix} = O(r^{-1}),\quad r \to \infty, \tag{5}$$

которые иногда легче проверить.

Утверждение 1. Для $\operatorname{Im} k \geq 0,\ k \neq 0,$ задача (1)–(4) имеет не более одного решения [1].

Векторные пространства W и W'

Для изучения задачи дифракции на экране Ω введем векторное пространство распределений W.

Положим для любого вещественного s [13]

$$H^s(\Omega) := \left\{u|_\Omega : u \in H^s\left(R^2\right)\right\},$$

$$\tilde{H}^s(\bar{\Omega}) := \left\{u \in H^s\left(R^2\right) : \text{supp u} \subset \bar{\Omega}\right\}.$$

Скалярное произведение и норма в $H^s\left(R^2\right)$ определяются обычным образом:

$$(u,v)_s = \int \langle\xi\rangle^{2s} \hat{u}(\xi)\,\overline{\hat{v}(\xi)}\,d\xi,$$

$$\|u\|_s^2 = (u,u)_s;\quad \langle\xi\rangle := \left(1 + \|\xi\|^2\right)^{1/2}.$$

Здесь и всюду ниже, где не указана область интегрирования, подразумевается интеграл по R^2. $\tilde{H}^s\left(\bar{\Omega}\right)$ является (замкнутым) подпространством $H^s\left(R^2\right)$ с индуцированными скалярным произведением и нормой. Далее, $H^s\left(\Omega\right)=H^s\left(R^2\right)/\tilde{H}\left(\bar{\Omega}\right)$; в $H^s\left(\Omega\right)$ вводится скалярное произведение и норма факторпространства. Пространства $H^{-s}\left(\Omega\right)$ и $\tilde{H}^s\left(\bar{\Omega}\right)$ антидвойственны друг к другу при всех $s\in R$; $\tilde{H}^s\left(\bar{\Omega}\right)$ можно получить замыканием $C_0^\infty\left(\Omega\right)$ в пространстве $H^s\left(R^2\right)$ [13].

В дальнейшем нас будут интересовать главным образом пространства вектор-функций, поэтому через u, v будем обозначать векторы $u=\left(u_1,u_2\right)^T$, $v=\left(v_1,v_2\right)^T$ и т.д. При этом в записи $u\in H^s$ под пространством H^s уже понимается как декартово произведение двух экземпляров пространства H^s со скалярным произведением и нормой

$$\left(u,v\right)_s=\left(u_1,v_1\right)_s+\left(u_2,v_2\right)_s=\int\left\langle\xi\right\rangle^{2s}\hat{u}\left(\xi\right)\cdot\overline{\hat{v}\left(\xi\right)}\,d\xi;$$

$$\left\|u\right\|_s^2=\left\|u_1\right\|_s^2+\left\|u_2\right\|_s^2=\int\left\langle\xi\right\rangle^{2s}\left|\hat{u}\left(\xi\right)\right|^2d\xi.$$

Сохраним те же обозначения для пространств в векторном случае, так как во всех ситуациях из контекста ясно, о каком пространстве идет речь.

Определим гильбертово пространство $W=W\left(\bar{\Omega}\right)$ как пополнение $C_0^\infty\left(\Omega\right)$ по норме

$$\left\|u\right\|_W^2=\int\frac{1}{\left\langle\xi\right\rangle}\left|\hat{u}\left(\xi\right)\right|^2d\xi+\int\frac{1}{\left\langle\xi\right\rangle}\left|\xi\cdot\hat{u}\left(\xi\right)\right|^2d\xi$$

со скалярным произведением

$$\left(u,v\right)_W=\int\frac{1}{\left\langle\xi\right\rangle}\hat{u}\left(\xi\right)\cdot\overline{\hat{v}\left(\xi\right)}d\xi+\int\frac{1}{\left\langle\xi\right\rangle}\left(\xi\cdot\hat{u}\left(\xi\right)\left(\xi\cdot\overline{\hat{v}\left(\xi\right)}\right)\right)d\xi,$$

где $\hat{u}$ обозначает преобразование Фурье распределения u из пространства $W'\coloneqq\left(W\left(\bar{\Omega}\right)\right)'$, антидвойственного к W.

Сведение задачи к псевдодифференциальному уравнению на экране

Решение задачи (1)–(5) для случая $E,H\in C^2(R^3\setminus\bar{\Omega})$ можно представить в виде векторного потенциала:

$$E=ik^{-1}\left(\operatorname{grad}A_1(Div\,u)+k^2A_1u\right),H=\operatorname{rot}A_1u;\ k\neq0,$$

$$A_1 u = \frac{1}{4\pi}\int_{\Omega} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} u(y)ds, \quad x=(x_1,x_2,x_3). \tag{6}$$

Опуская точку $x=(x_1,x_2,x_3)$ на экран Ω сведем проблему (1)–(4) к векторному интегродифференциальному уравнению

$$Lu := (\operatorname{grad} A(\operatorname{Div} u) + k^2 Au)\big|_t = f, \tag{7}$$

где A является интегральным оператором

$$Au = \int_{\Omega} \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} u(y)ds, \tag{8}$$

$f := 4\pi k E_t^0\big|_{\Omega}$ и Div – это тангенциальная дивергенция на Ω. Здесь тангенциальный вектор u – так называемая поверхностная плотность тока.

Определение [14]. Волновое число k является нерезонансным, если уравнение $L(k)u=0$ имеет только тривиальные решения.

Утверждение 2 [14]. Если k является нерезонансным и $k\neq 0$, тогда оператор $L(k): W \to W'$ является непрерывно обратимым.

Метод Галеркина

Рассмотрим *n*-мерное пространство $V_n \subset W$. Будем проводить аппроксимации u элементами $u_n \in V_n$. Методом Галеркина находим u_n из системы уравнений

$$(Au_n, v) = (f, v), \quad \forall v \in V_n. \tag{9}$$

Эти уравнения определяются конечномерным оператором $A_n : V_n \to V_n'$, где V_n' есть *антидуальное* пространство к V_n.

Допустим, что подпространства X_n и Y_n являются линейными оболочками базисных и тестовых функций $X_n = span\{z_1,...,z_n\}$, $Y_n = span\{v_1,...,v_n\}$. Представим u_n в виде линейной комбинации базисных функций

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_n z_n$$

и подставим это выражение в формулу (9). В результате получим эквивалентную систему линейных алгебраических уравнений порядка n

$$\sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left(Az_k, v_j\right) = \left(f, v_j\right), \quad j=1,...,n, \tag{10}$$

относительно неизвестных коэффициентов γ_k.

Свойство аппроксимации подпространств базисных функций крышек для плоского экрана

Рассмотрим вопрос об аппроксимации непрерывно дифференцируемой (векторной) функции

$$f(x,y)=\left(f_1(x,y),f_2(x,y)\right),$$

$$f\in C_0^1(\Pi)\left(f_1\in C_0^1(\Pi),f_2\in C_0^1(\Pi)\right)$$

в прямоугольнике $\Pi=[0,a]\times[0,b]$ «rooftop» базисными функциями $\varphi_j(x,y)$ по методу, предложенному в статье [15]. Рассмотрим в Π равномерную прямоугольную сетку с шагами h_1 и h_2 по осям x и y с узлами $M_{ij}=\left(x_i,y_j\right)$, $x_i=ih_1$, $y_j=jh_2$ ($i=0,...,N_1, j=0,...,N_2$), $h_1=\dfrac{a}{N_1}$, $h_2=\dfrac{b}{N_2}$.

Базисную функцию $\varphi_j(x,y)$, отвечающую ребру j, определим по правилу (см. рис. 1)

$$\varphi_j(x,y)=\begin{cases}\left(x-x_1^{(j)},0\right)\dfrac{l_j}{S_j^+} \text{ в } \Pi_j^+,\\ \left(x_2^{(j)}-x,0\right)\dfrac{l_j}{S_j^-} \text{ в } \Pi_j^-,\end{cases}\qquad \varphi_j(x,y)=\begin{cases}\left(0,y-y_1^{(j)}\right)\dfrac{l_j}{S_j^+} \text{ в } \Pi_j^+,\\ \left(0,y_2^{(j)}-y\right)\dfrac{l_j}{S_j^-} \text{ в } \Pi_j^-\end{cases} \tag{11}$$

и $\varphi_j\equiv 0$ вне прямоугольников Π_j^+,Π_j^-. Здесь l_j – длина j-го ребра; $S_j^{\pm}$ – площадь прямоугольника $\Pi^{\pm}$; C_j – середина ребра с номером j.

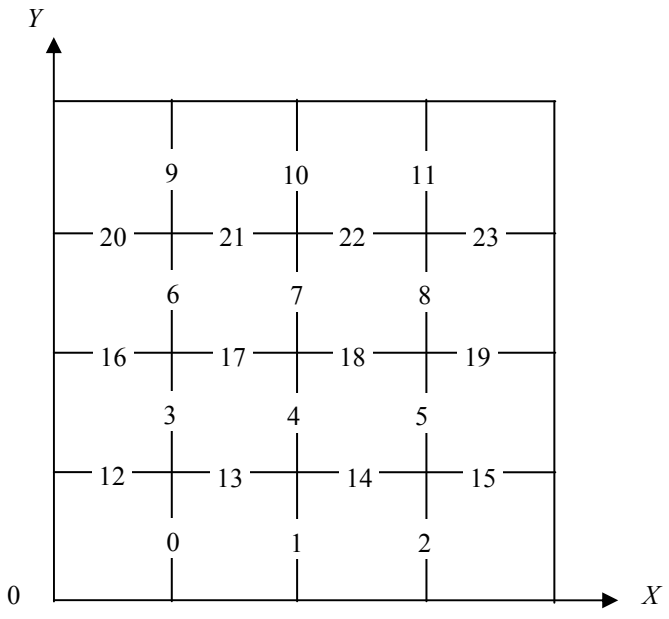


Рис. 1. Расчетная сетка

Нормирование функций $\varphi_j(x,y)$ выполнено так, что нормальная составляющая (к ребру) этих функций в середине ребра равна 1, т.е. $(\varphi_j)_n(C_j)=1$. Отметим важное свойство функций φ_j: их нормальные составляющие на границе $\partial\Pi_j$ носителя $\Pi_j=\Pi_j^+\cup\Pi_j^-$ равны нулю, $(\varphi_j)_n\big|_{\partial\Pi_j}=0$.

Пусть $\phi(x,y)=\sum_j \alpha_j\varphi_j(x,y)$, $\phi(x,y)=(\phi_1(x,y),\phi_2(x,y))$. Тогда коэффициент α_j равен нормальной составляющей функции ϕ в середине ребра: $\alpha_j=\varphi_j(C_j)\cdot\vec{n}$. Будем аппроксимировать функцию $f(x,y)$ функцией $\phi(x,y)$, выбирая коэффициенты α_j из условия $f_n(C_j)=\phi_n(C_j)$, т.е. $\phi(x,y)=\sum_j f_n(C_j)\varphi_j(x,y)$. Оценим разность $|f_i(x,y)-\phi_i(x,y)|$ в прямоугольнике Π, $i=1,2$. Пусть C_k – середина вертикального ребра с номером k ближайшая к точке $(x,y)\in\Pi$. Если точка C_k не единственная ближайшая, то можно взять любую из них.

Обозначим через $\omega(g,\delta,\eta)$ модуль непрерывности функции g в прямоугольнике Π [16]:

$$\omega(g,\delta,\eta):=\sup\left\{\left|g(x',y')-g(x'',y'')\right|:|x'-x''|\le\delta,|y'-y''|\le\eta\right\}.$$

Рассмотрим один из прямоугольников Π сетки, например $PQRT$, где $P(x_1,y_1)$, $R(x_2,y_2)$, $Q(x_3,y_3)$, $T(x_4,y_4)$, причем $x_3=x_1+h$, $y_3=y_1+h$, $x_2=x_1$, $y_2=y_1+h_2$, $x_4=x_1+h$, $y_4=y_1$. Пусть ребра PR, PT, QT, RQ имеют номера i, j, k, l соответственно, а точки A_i, B_j, C_k, D_l – середины этих ребер (рис. 2).

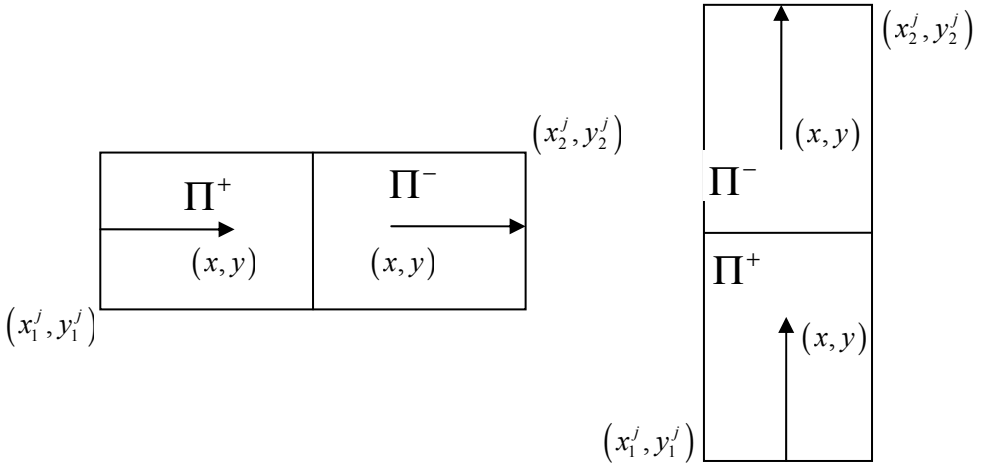


Рис. 2. Базисные функции

Оценим разность функций f и ϕ в точке (x,y) при условии, что она принадлежит прямоугольнику $PRQT$. Тогда

$$f(x,y)-\phi(x,y)=f(x,y)-$$

$$-\left(f_1(A_i)\varphi_i(x,y)+f_2(B_j)\varphi_j(x,y)+f_1(C_k)\varphi_k(x,y)+f_2(D_l)\varphi_l(x,y)\right).$$

Здесь

$$f_1(A_i)\varphi_i(x,y)=f_1(A_i)(x_2-x,0)^T h_1^{-1};$$

$$f_2(B_j)\varphi_j(x,y)=f_2(B_j)(0,y_2-y)^T h_2^{-1};$$

$$f_1(C_k)\varphi_k(x,y)=f_1(C_k)(x-x_1,0)^T h_1^{-1};$$

$$f_2(D_l)\varphi_l(x,y)=f_2(D_l)(0,y-y_1)^T h_2^{-1};$$

откуда покоординатно имеем (рис. 3):

$$f_1(x,y)-\phi_1(x,y)=f_1(x,y)-f_1(A_i)(x_2-x)h_1^{-1}-f_1(C_k)(x-x_1)h_1^{-1},$$

$$f_2(x,y)-\phi_2(x,y)=f_2(x,y)-f_2(B_j)(y_2-y)h_2^{-1}-f_2(D_l)(y-y_1)h_2^{-1}.$$

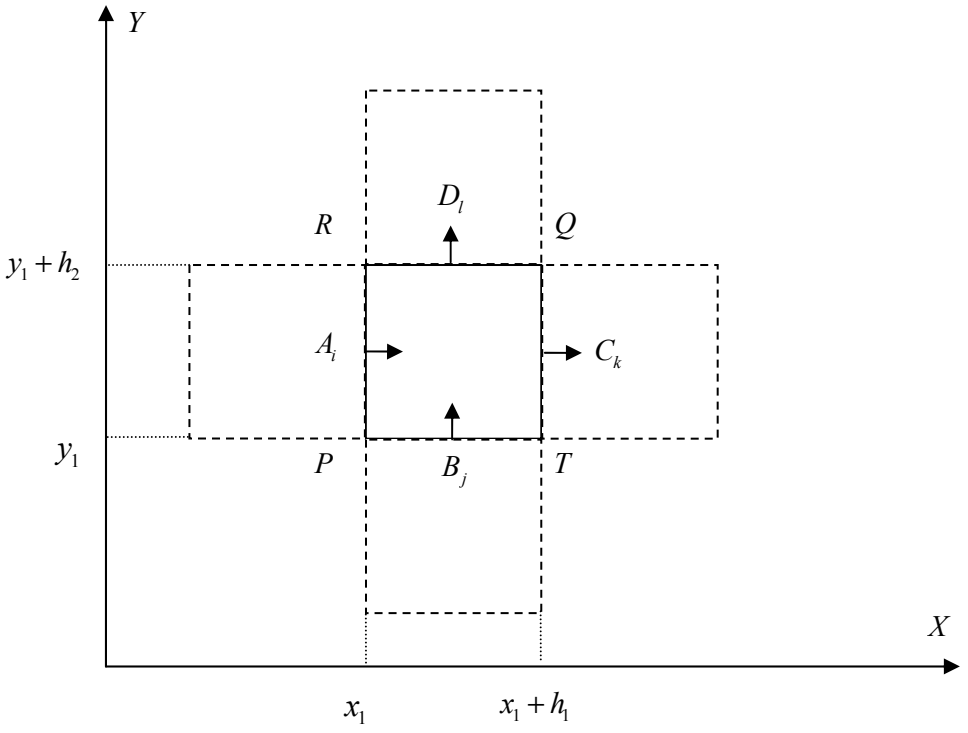


Рис. 3. Шаблон носителей

Введем обозначения: $\Theta_1 := \dfrac{x - x_1}{h_1}$, $\Theta_2 := \dfrac{y - y_1}{h_2}$, $0 \le \Theta_1 \le 1$, $0 \le \Theta_2 \le 1$.

Тогда

$$f_1(x,y) - \phi_1(x,y) = f_1(x,y) - (1-\Theta_1) f_1(A_i) - \Theta_1 f_1(C_k);$$

$$f_2(x,y) - \phi_2(x,y) = f_2(x,y) - (1-\Theta_2) f_2(B_j) - \Theta_2 f_2(D_l).$$

Учитывая, что непрерывная в $\overline{T}$ функция достигает любого своего промежуточного значения в некоторой точке из $\overline{T}$, получаем, что

$$\left|f_1(x,y) - \phi_1(x,y)\right| \le \omega\left(f_1; \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right); \ \left|f_2(x,y) - \phi_2(x,y)\right| \le \omega\left(f_2; \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right).$$

Легко получить более грубую оценку:

$$\left|f_m(x,y) - \phi_m(x,y)\right| \le \omega\left(f_1, \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \omega\left(f_2; \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right), \ m = 1,2. \qquad (12)$$

Заметим, что в силу условия

$$f_1\big|_{x=0} = f_1\big|_{x=a} = 0, \ f_2\big|_{y=0} = f_2\big|_{y=b} = 0,$$

граничные ребра в вышеприведенных оценках фигурируют лишь формально с коэффициентом 0 перед соответствующей базисной функцией.

Случай принадлежности точки (x,y) одному из ребер PR, PT, QT, RQ также не исключается. Таким образом, в силу произвольности выбора точки $(x,y) \in \overline{\Pi}$ и равномерности оценки (12) оценка (12) имеет место для всех точек $(x,y) \in \overline{\Pi}$.

Пусть снова $(x,y) \in PRQT$. Оценим разность функций $\operatorname{div} f$ и $\operatorname{div}\phi$, пользуясь полученными результатами. Имеем

$$\operatorname{div} f - \operatorname{div}\phi = \operatorname{div} f - \left(-h_1^{-1} f_1(A_i) + h_1^{-1} f_1(C_k) - h_1^{-1} f_2(B_j) + h_2^{-1} f_2(D_l)\right),$$

или

$$\operatorname{div} f - \operatorname{div}\phi = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \left.\frac{\partial f_1}{\partial x}\right|_{C_k} - \frac{f_1(C_k) - f_1(A_i)}{h_1} +$$

$$+ \frac{\partial f_2}{\partial y} - \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{D_l} + \left.\frac{\partial f_2}{\partial y}\right|_{D_l} - \frac{f_2(D_l) - f_2(B_j)}{h_2}.$$

Далее находим, учитывая непрерывную дифференцируемость функций f_1 и f_2 в $\overline{\Pi}$:

$$\left|\operatorname{div} f - \operatorname{div}\varphi\right| \le \omega\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}; \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \omega\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}; \frac{h_1}{2}, 0\right) + \omega\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}; \frac{h_1}{2}, \frac{h_2}{2}\right) + \omega\left(\frac{\partial f_2}{\partial y}; 0, \frac{h_2}{2}\right).$$

Отсюда легко получить более грубую оценку:

$$\left|\operatorname{div} f - \operatorname{div}\varphi\right| \le 2\left(\omega\left(\frac{\partial f_1}{\partial x};\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)+\omega\left(\frac{\partial f_2}{\partial y};\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)\right), \tag{13}$$

которая равномерна и имеет место для всех $(x,y)\in\overline{\Pi}$.

Для любого прямоугольника, расположенного в пространстве иначе, доказательство проводится аналогично.

Оценки (12) и (13) позволяют доказать теорему об аппроксимации элементов $\phi\in W$ базисными функциями φ_j. Пусть в прямоугольнике Π выбрана равномерная прямоугольная сетка с шагом h_1 по переменной x, и шагом h_2 по переменной y. Рассмотрим конечномерное подпространство $X_N = span\{\varphi_1,...,\varphi_N\}$, являющееся линейной оболочкой базисных функций φ_j, $1,...,N$, где N – количество внутренних ребер сетки. Нетрудно проверить, что $\varphi_j\in W(\Pi)$, $X_N\subset W$ [17]. Имеет место следующий результат.

Теорема. Для любого $\phi\in W$ верна оценка $\inf\limits_{\psi\in X_N}\|\psi-\phi\|_W\to 0$, $N\to\infty$, и верна оценка

$$\inf_{\psi\in X_N}\|\psi-\phi\|_W \le C_0(h_1+h_2)\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Pi})}, \tag{14}$$

где C_0 не зависит от h_1 и h_2, если $\varphi\in W\cap C^2(\overline{\Pi})$.

Доказательство. Так как $C_0^\infty(\Pi)$ плотно в $W(\Pi)$, выбираем элемент $f\in C_0^\infty(\Pi)$ такой, что $\|\phi-f\|_W\le\varepsilon$, $\varepsilon := h_1+h_2$. Тогда

$$\|\phi-\phi_N\|_W \le \|\phi-f\|_W + \|f-\phi_N\|_W \le \varepsilon + \|f-\phi_N\|_W,$$

где ϕ_N – функция, аппроксимирующая f.

Выберем ϕ_N следующим образом:

$$\phi_N = \sum_{j=1}^{N} f_n(C_j)\varphi_j,$$

где C_j – середина j-го ребра; f_n – нормальная составляющая к ребру функции f.

Так как вложение $L_p(\Pi)\subset\tilde{H}^{-1/2}(\overline{\Pi})$ непрерывно при $\frac{4}{3}<p<2$ [18], то $\|g\|_{-1/2}\le C\|g\|_p$, $g\in L_p(\Pi)$. Но $\|g\|_p\le \operatorname{mes}^{\frac{1}{p}}\Pi\|g\|_C$, если $g\in C(\overline{\Pi})$. Поэтому для векторной функции u

$$\|u\|_W \le C\cdot\operatorname{mes}^{\frac{1}{p}}\Pi\left(\|u_1\|_C^2+\|u_2\|_C^2+\|\operatorname{div}u\|_C^2\right)^{\frac{1}{2}}\le$$

$$\le C\sqrt{3}\,\mathrm{mes}^{\frac{1}{p}}\Pi\cdot\max\left(\|u_1\|_C,\|u_2\|_C,\|\mathrm{div}\,u\|_C\right).$$

Положим $C_1 := 2C\sqrt{3}\,\mathrm{mes}^{\frac{1}{p}}\Pi$. В силу оценок (11) и (13) получаем

$$\|f-\phi_N\|_W \le C_1\left[\omega\left(f_1;\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)+\omega\left(f_2;\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+\omega\left(\frac{\partial f_1}{\partial x};\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)+\omega\left(\frac{\partial f_2}{\partial y};\frac{h_1}{2},\frac{h_2}{2}\right)\right]\le C_2\left(h_1+h_2\right),$$

так как f любое число раз непрерывно дифференцируема в $\overline{\Pi}$.

В качестве C_2 можно взять $C_2 := C_1 \max\limits_{\substack{k,\alpha:1\le k\le 2\\ j:1\le j\le 2}} \max\limits_{M\in\overline{\Pi}}\left|D_\alpha^k f_j\right|$, $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2)$ – мультииндекс, $D_\alpha^k=\dfrac{\partial^k}{\partial x^{\alpha_1}\partial y^{\alpha_2}}$, $|\alpha|=k$. Тогда окончательно можно выбрать $C_0=1+C_2$. □

Аналогичный результат был получен для базисных функций, введенных в работах [18, 19].

Описание численного метода и результаты расчетов

Разработанный метод позволяет рассчитывать поверхностные токи на ограниченном, бесконечно тонком и идеально проводящем экране. Экран может быть неплоским и иметь сложную геометрическую форму.

Рассмотрим способ построения сетки для неплоского экрана канонической формы. Под фигурой канонической формы для рассматриваемой задачи будем понимать прямоугольный параллелепипед, разбитый на элементарные параллелепипеды Π_i. Элементарные параллелепипеды Π_i имеют стенки, но являются пустыми внутри. Пример экрана канонической формы представлен на рис. 4.

Следуя схеме метода Галеркина (9), можно получить решение интегрального уравнения на экране канонической формы. Далее, используя субиерархический метод [3–12], можно выделить из экрана канонической формы экран сложной геометрической формы и рассчитать поверхностные токи на нем. Для этого составляется система линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) на базе элементов экрана сложной геометрической формы. Каждый элемент СЛАУ рассчитывается путем вычисления четырехкратного интеграла

$$A_{ij}=(A\varphi_i,\varphi_j)=-\int_\Omega G(x,y)\mathrm{div}\varphi_i(x)\mathrm{div}\,\overline{\varphi}_j(y)ds+$$

$$+k^2\int_\Omega G(x,y)\varphi_i(x)\overline{\varphi}_j(y)ds,$$

по паре носителей: Π_i и Π_j. Здесь $G(x,y)=\dfrac{\exp\left(ik|x-y|\right)}{|x-y|}$ – известная функция Грина. Правая часть СЛАУ определяется падающим полем $f_j=\int\limits_{\Omega} f\cdot\varphi_j ds,\ j=1,...,N$.

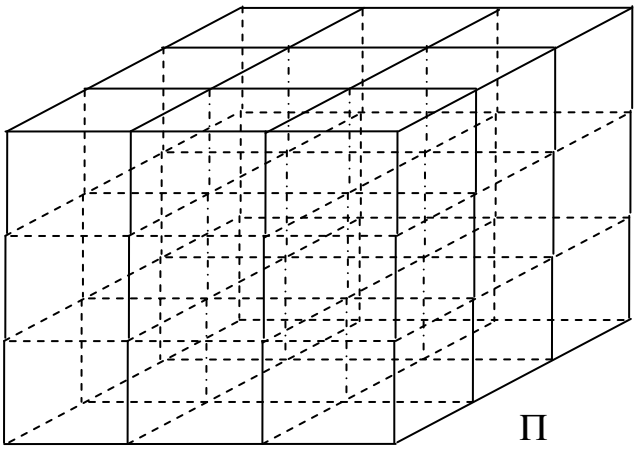


Рис. 4. Пример экрана канонической формы

На рис. 5 представлена форма экрана сложной геометрической формы, на котором производился расчет поверхностных токов. Рассматриваемый экран состоит из трех плоских параллельных экранов, средний из которых имеет в центре крестовое отверстие (λ – длина волны, $k_0=2\pi/\lambda$). На рис. 6 представлены расчеты модулей поверхностных токов на каждом из слоев.

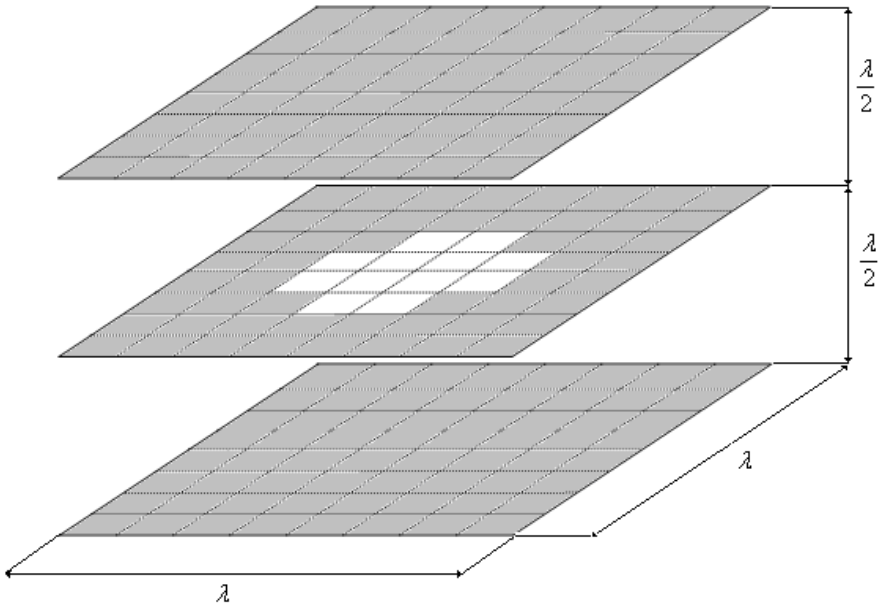
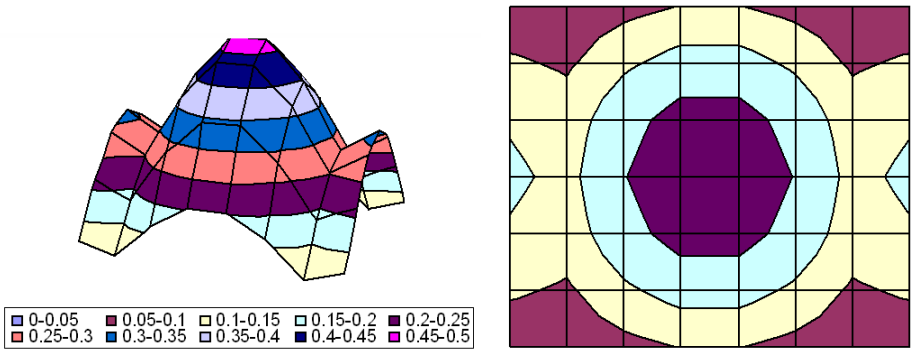
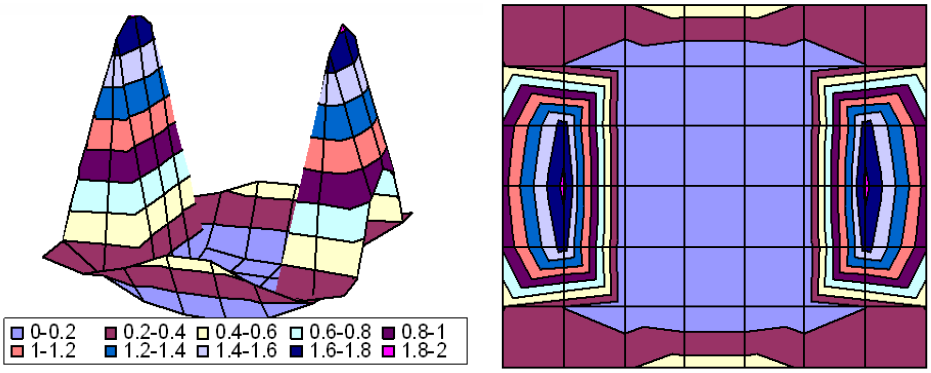


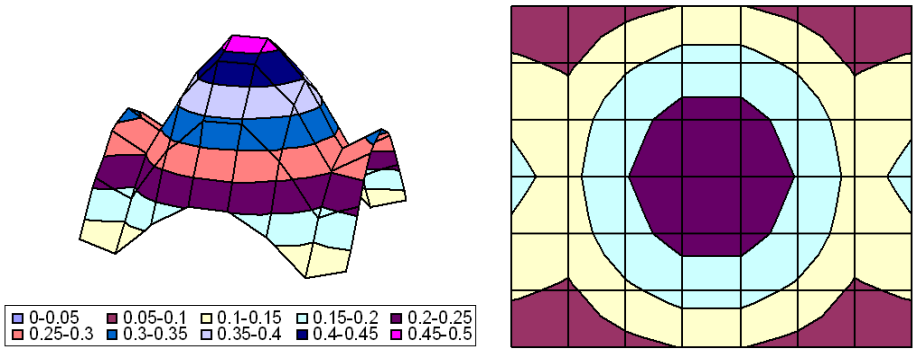
Рис. 5. Экран сложной геометрической формы



а)



б)



в)

Рис. 6. Модуль поверхностных токов $|J_x|$: а – для верхнего экрана;
б – для среднего экрана; в – для нижнего экрана

Построенная модель представляет интерес при расчете печатных плат и многослойных структур. Для решения рассматриваемой задачи использовался суперкомпьютерный комплекс Московского государственного университета имени М. В. Ломоносова

Список литературы

1. **Ильинский, А. С.** Дифракция электромагнитных волн на проводящих тонких экранах / А. С. Ильинский, Ю. Г. Смирнов. – М. : Радиотехника, 1996. – 176 с.
2. **Самохин, А. Б.** Интегральные уравнения и итерационные методы в электромагнитном рассеянии / А. Б. Самохин. – М. : Радио и Связь, 1998. – 160 с.

3. **Медведик, М. Ю.** Применение субиерархического метода в задачах электродинамики / М. Ю. Медведик // Вычислительные методы и программирование. – 2012. – Т. 13. – С. 87–97.
4. **Медведик, М. Ю.** Параллельный алгоритм расчета поверхностных токов в электромагнитной задаче дифракции на экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов, С. И. Соболев // Вычислительные методы и программирование. – 2005. – Т. 6. – С. 99–108.
5. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм и сходимость метода Галеркина в задачах дифракции электромагнитного поля на плоском экране / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Сер. «Естественные науки». – 2004. – № 5. – С. 5–19.
6. **Антонов, А. В.** Разработка Web-ориентированного вычислительного комплекса для решения трехмерных векторных задач дифракции электромагнитных волн на основе субиерархических параллельных алгоритмов и ГРИД-технологий / А. В. Антонов, М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2007. – № 4. – С. 60–67.
7. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический параллельный вычислительный алгоритм для решения задач дифракции электромагнитных волн на плоских экранах / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2008. – Т. 53, № 4. – С. 441–446.
8. **Медведик, М. Ю.** Применение ГРИД-технологий для решения объемного сингулярного интегрального уравнения для задачи дифракции на диэлектрическом теле субиерархическим методом / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2008. – № 2. – С. 2–14.
9. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический подход для решения объемного сингулярного интегрального уравнения задачи дифракции на диэлектрическом теле в волноводе методом коллокации / М. Ю. Медведик, Д. А. Миронов, Ю. Г. Смирнов // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2010. – № 2. – С. 32–43.
10. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения задачи дифракции электромагнитных вол на диэлектрическом теле в прямоугольном волноводе / М. Ю. Медведик, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2011. – Т. 56, № 8. – С. 940–945.
11. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод решения интегрального уравнения Липпмана – Швингера на телах сложной формы / М. Ю. Медведик // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 2. – С. 175–180.
12. **Медведик, М. Ю.** Субиерархический метод для решения псевдодифференциального уравнения в задаче дифракции в слоях, связанных через отверстие / М. Ю. Медведик, И. А. Родионова, Ю. Г. Смирнов // Радиотехника и электроника. – 2012. – Т. 57, № 3. – С. 281–290.
13. **Трибель, Х.** Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы / Х. Трибель. – М. : Мир, 1980. – 664 с.
14. **Смирнов, Ю. Г.** Математические методы исследования задач электродинамики / Ю. Г. Смирнов. – Пенза : Изд-во ПензГУ, 2009. – 268 с.
15. **I. Hänninen, M. T.** Singularity subtraction integral formulae for surface integral equations with RWG, rooftop and hybrid basis functions / I. Hänninen, M. Taskinen, and J. Sarvas // Prog. Electromagn. Res. PIER. – 2006. – V. 63. – P. 243–278.
16. **Корнейчук, Н. П.** Сплайны в теории приближения / Н. П. Корнейчук. – М. : Наука, 1984. – 352 с.

17. **Смирнов, Ю. Г.** О разрешимости векторных интегродифференциальных уравнений в задаче дифракции электромагнитного поля на экранах произвольной формы / Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1994. – Т. 34, № 10. – С. 1461–1475.
18. **Rao, S. M.** Electromagnetic Scattering by Surface of Arbitrary Share / S. M. Rao, D. R. Wilton, and A. W. Glisson // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1982. – V. Ap-30. – P. 409–417.
19. **Смирнов, Ю. Г.** О сходимости методов Галеркина для уравнений с операторами, эллиптическими на подпространствах, и о решении уравнения электрического поля / Ю. Г. Смирнов // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2007. – Т. 47, № 1. – С. 133–143.

Медведик Михаил Юрьевич
кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра математики
и суперкомпьютерного моделирования,
Пензенский государственный
университет

Medvedik Mikhail Yuryevich
Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of mathematics
and supercomputer modeling,
Penza State University

E-mail: _medv@mail.ru

УДК 517.6
Медведик, М. Ю.

Применение функций крышек для решения задачи дифракции электромагнитных волн на экранах сложной формы / М. Ю. Медведик // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2012. – № 3 (23). – С. 84–98.